Rechnerstrukturen WS 2012/13

Ab 5.11.: Vorlesung im HSG H.001

- Boolesche Funktionen und Schaltnetze
- KV-Diagramme
  - Beschreibung und Beispiel
  - Minimalpolynome
- Algorithmus von Quine und McCluskey
  - Einleitung, Berechnung von PI
  - PI-Tafel für das Überdeckungsproblem

Hinweis: *Folien teilweise a. d. Basis von Materialien von Thomas Jansen*

29. Oktober 2012

KV-Diagramme

Maurice Karnaugh (1953)
Edward W. Veitch (1952)

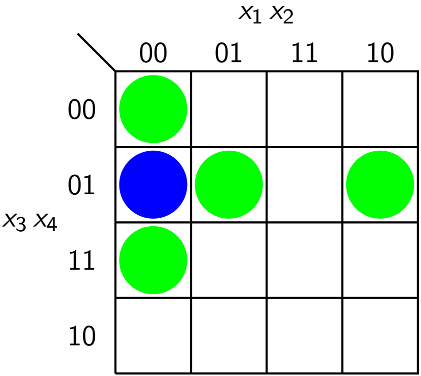
KV-Diagramme systematischer, anschaulicher und viel übersichtlicherer Weg, Funktionen $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ und $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ zu vereinfachen

aber schon für $f\colon \{0,1\}^5 \to \{0,1\}$ unübersichtlich

$\Rightarrow$ darum vor allem im HaPra wichtig.

KV-Diagramm für $f: \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

Nachbarschaften, d.h. Variablenbelegungen unterscheiden sich nur in einer Stelle



Hinweis: Nicht alle möglichen Nachbarschaften gezeigt!

Beispiel KV-Diagramm für $f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$

$f\colon \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit $(1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,1,1,0,0,0,0)$
(Beispielfunktion wie bereits gesehen)

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,\ldots,x_4)$
0	0	0	0	1
	⋮			⋮
1	0	1	1	1
	⋮			⋮
1	1	1	1	0

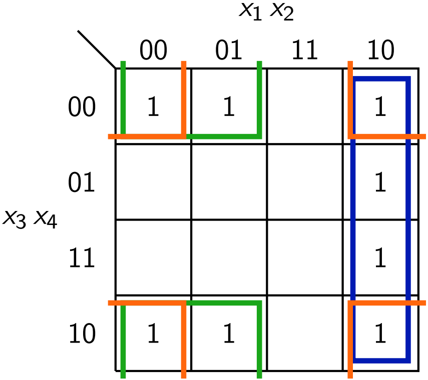
$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	1	1	0	1

Nullen weglassen

für mehr Übersichtlichkeit

Was fällt bei der Variablenbelegung auf? Warum ist das so?

KV-Diagramm für Beispielfunktion $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$



$x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow x_1\,\overline{x_2}$

$x_1 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

$x_2 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow \overline{x_2}\,\overline{x_4}$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
$= x_1\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_4}$

Suche alle größten Rechtecke mit Zweierpotenzlänge.
Bilde für jedes Rechteck passendes Monom.
Decke alle Einsen durch sparsame Rechteckauswahl ab.
Bilde f als Disjunktion der korrespondierenden Monome.

Einordnung KV-Diagramme

Was leisten KV-Diagramme?

Beobachtung   Wir lösen mit KV-Diagrammen ein Problem, das wir noch gar nicht definiert haben.

klar   Wir holen das jetzt nach.

vorab   Begriffsfestlegungen

- Variable
  Beispiele $x_1, x_2, x_3, \ldots$
- Literale   Variable und Negationen
  Beispiele $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots$
- Monom   Konjunktion einiger Literale
  Beispiele $x_1 \overline{x_3} x_4,\ x_2$
- Polynom   Disjunktion einiger Monome
  Beispiel $\overline{x_1}\, x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_4}\, x_5$

Weitere Begriffsdefinitionen

Wir haben schon Variable, Literal, Monom, Polynom.

- Implikant von f Monom m mit folgender Eigenschaft: $\forall x \in \{0,1\}^n\colon m(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$
  Beispiel Monom eines Polynoms für f
- Verkürzung eines Monoms m Monom m', für das m Implikant ist
  Beispiel $x_1\,\overline{x_3}$ ist Verkürzung von $x_1\,\overline{x_3}$
- echte Verkürzung eines Monoms m Monom m', das Verkürzung von m ist und echt weniger Literale enthält
  Beispiel $\overline{x_3}$ ist echte Verkürzung von $x_1\,\overline{x_3}$
- Primimplikant von f Implikant von f, für den es keine echte Verkürzung gibt, die auch Implikant von f ist
  Beispiel $\overline{x_2}\,x_3$ ist Primimplikant von $x_1 \vee \overline{x_2}\,x_3$

Verbindung zu Schaltnetzen

Erinnerung Wir zählen keine Negationen mehr.

Monom mit i Literalen Und-Gatter mit Fan-In i oder
$i-1$ Und-Gatter mit Fan-In 2
angemessen Kosten i

Polynom mit j Monomen zusätzlich Oder-Gatter mit Fan-In j oder
$j-1$ Oder-Gatter mit Fan-In 2
angemessen zusätzlich Kosten j

also direkte Verbindung zwischen
Polynom-Kosten und Schaltnetz-Kosten

noch ein letzter Begriff

Minimalpolynom zu f Polynom für f mit minimalen Kosten
unter allen Polynomen für f

Minimalpolynome

also Minimalpolynome liefern „günstigste“ Schaltnetze. . .

Vorsicht Stimmt nicht so ganz!
nur richtig, wenn man sich auf
direkte Polynomrealisierung einschränkt

trotzdem Wir suchen Minimalpolynome.

Wie finden wir systematisch Minimalpolynome?

Minimalpolynome und Primimplikanten

Theorem Minimalpolynome enthalten nur Primimplikanten.

Beweis durch Widerspruch

Annahme $f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_i$ Minimalpolynom,
m_1 kein Primimplikant zu f

gemäß Definition $\exists m'$: m_1 ist Implikant von m',
m' ist echte Verkürzung von m_1 und
m' ist Implikant von f

klar $m_1 = 1 \Rightarrow m' = 1$, da m_1 Implikant von m'
Beobachtung $m' = 1 \Rightarrow f = 1$, da m' Implikant von f ist
also $m' \vee m_2 \vee \cdots \vee m_i$ ist günstigeres Polynom für f
Widerspruch zur Voraussetzung, dass $m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_i$
Minimalpolynom für f $\square$

Minimalpolynomberechnung

Idee für Minimalpolynomberechnung

1. Berechne alle Primimplikanten von f.
2. Berechne günstigste „Überdeckung“ von f mit diesen Monomen.

Beobachtung Dieser Ansatz ist sicher schlecht, wenn
das Minimalpolynom zu f klein ist,
f aber viele Primimplikanten hat.

Wir verfolgen diesen Ansatz dennoch.

Minimalpolynomberechnung

Behauptung Wir haben mit KV-Diagrammen Minimalpolynome berechnet.

klar Wir haben günstigste Überdeckung von f gesucht.

offen Entsprechen maximale Rechtecke mit Zweierpotenzseitenlängen genau Primimplikanten?

klar Für $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ gibt es Monome der Längen 0, 1, 2, 3 und 4.

Wir schauen uns die Situation für jede mögliche Monomlänge an.

Primimplikanten der Länge 0

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

Monom 1

Primimplikanten der Länge 1

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	1
11			1	1
10	1	1	1	1

Monom x_1

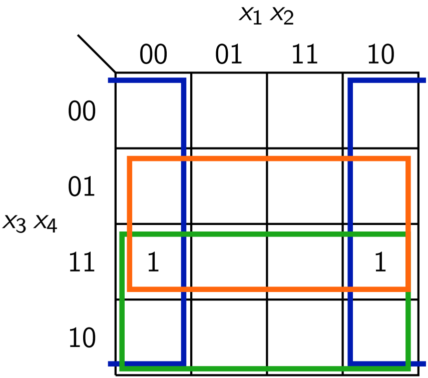
Monom $\overline{x_4}$

Primimplikanten der Länge 2

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00				
01				
11	1	1		
10	1	1		

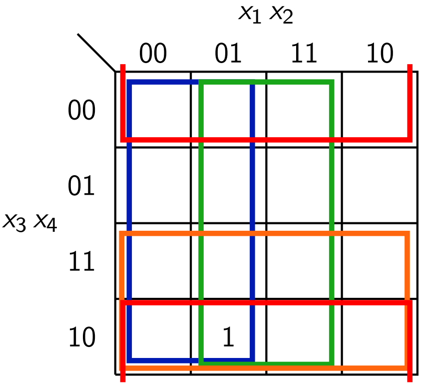
Monom $\overline{x_1}\,x_3$

Primimplikanten der Länge 3



Monom $\overline{x_2}\, x_3\, x_4$

Primimplikanten der Länge 4



Monom $\overline{x_1}\, x_2\, x_3\, \overline{x_4}$

Beobachtung: Primimplikanten entsprechen genau KV-Rechtecken

Minimalpolynombestimmung mit KV-Diagramm

Aufgabe Bestimme für $f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ ein Minimalpolynom.

Vorgehen

1. Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm
2. Finden aller maximaler Zweierpotenz-Rechtecke
3. Finden eines Primimplikanten für jedes Rechteck
4. Finden einer Überdeckung aller Einsen durch eine minimale Monomauswahl

jetzt noch ein Beispiel
$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$

Eintragen der Funktion ins KV-Diagramm

$$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\} \text{ mit } \begin{array}{c} \\ (\end{array}\!\!\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1, & 0, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0\,, & 1\,, & 0\,, & 0\,, & 1\,, & 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \\ ) \end{array}$$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$0 = (00\,00)_2$
$1 = (00\,01)_2$
$2 = (00\,10)_2$
$3 = (00\,11)_2$
$4 = (01\,00)_2$
$5 = (01\,01)_2$
$6 = (01\,10)_2$
$7 = (01\,11)_2$
$8 = (10\,00)_2$
$9 = (10\,01)_2$
$10 = (10\,10)_2$
$11 = (10\,11)_2$
$12 = (11\,00)_2$
$13 = (11\,01)_2$
$14 = (11\,10)_2$
$15 = (11\,11)_2$

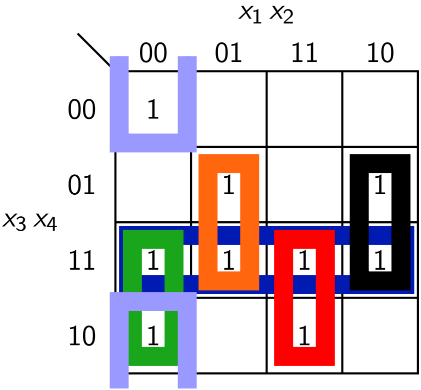
Finden aller maximaler Zweierpotenz-Rechtecke

$f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

Finden eines Primimplikanten für jedes Rechteck

$f : \{0,1\}^4 \rightarrow \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$



$x_3\ x_4$

$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3$

$\overline{x_1}\ x_2\ x_4$

$x_1\ x_2\ x_3$

$x_1\ \overline{x_2}\ x_4$

$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_4}$

Überdeckung aller Einsen durch minimale Monomauswahl

$f\colon \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$ mit $(1,0,1,1,0,1,0,1,0,1,0,1,0,0,1,1)$

$x_3\,x_4$ \ $x_1\,x_2$	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11	1	1	1	1
10	1		1	

$x_3\,x_4$	beste Wahl
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	
$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$	**erforderlich**
$x_1\,x_2\,x_3$	**erforderlich**
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$	**erforderlich**
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$	**erforderlich**

also $x_3\,x_4 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$
Minimalpolynom

Fazit KV-Diagramme

Mit KV-Diagrammen effizient beide Schritte zur Minimalpolynomberechnung durchführbar

1. Bestimmung aller Primimplikanten
2. Bestimmung einer minimalen Überdeckung

für Funktionen $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ für $n \in \{3,4\}$

klar Das reicht nicht aus.

Wie bestimmen wir Minimalpolynome für $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ für größeres n?

klar Wir suchen einen Algorithmus.

Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Willard van Orman Quine (1955)
Edward J. McCluskey (1956)

Algorithmus von Quine/McCluskey

Eingabe Fkt. f als Liste aller Minterme zu einschlägigen Indizes
Ausgabe Minimalpolynom zu f

1. Berechne PI, Menge aller Primimplikanten von f.
2. Berechne minimale f überdeckende Auswahl aus PI.

Algorithmus von Quine/McCluskey: Erster Teil

Algorithmus 11 (Berechnung von PI)

Eingabe L_0: Liste aller Minterme zu einschlägigen Indizes von f
Ausgabe PI: Menge aller Primimplikanten zu f

1. $i := 0$; $\mathrm{PI} := \emptyset$
2. So lange $L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x \colon \{m\,x, m\,\overline{x}\} \subseteq L_i\}$ (Resolution)
4. $\quad \mathrm{PI} := \mathrm{PI} \cup \{m \in L_i \mid m$ hat keine echte Verkürzung in $L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. Ausgabe PI

Fehlt: Beweis, dass Algorithmus 11 korrekt ist.

Korrektheit der PI-Berechnung

1. $i := 0$; $\text{PI} := \emptyset$
2. So lange $L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x\colon \{m\,x, m\,\overline{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad \text{PI} := \text{PI} \cup \{m \in L_i \mid m \text{ hat keine echte Verkürzung in } L_{i+1}\}$

   ...

Behauptung L_i ist Menge aller Implikanten der Länge $n - i$

Induktionsanfang stimmt für L_0 $\surd$

Induktionsschluss Annahme stimmt für L_i

klar L_{i+1} enthält nur Monome der Länge $n - i - 1 = n - (i + 1)$

Beobachtung L_{i+1} enthält nur Implikanten
denn $m\,x$ Implikant und $m\,\overline{x}$ Implikant
$\Rightarrow$ m Implikant (Resolution)

Beobachtung L_{i+1} enthält alle Implikanten
denn jeder Implikant m hat Verlängerung um 1 in L_i,
(Induktionsvoraussetzung), also kommt m nach L_{i+1} $\surd$

Korrektheit der PI-Berechnung

1. $i := 0$; $\mathrm{PI} := \emptyset$
2. So lange $L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x\colon \{m\,x, m\,\overline{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad \mathrm{PI} := \mathrm{PI} \cup \{m \in L_i \mid m$ hat keine echte Verkürzung in $L_{i+1}\}$

...

Wir haben L_i ist Liste Implikanten der Länge $n - i$

klar Algorithmus 11 terminiert
denn spätestens $L_{n+1} = \emptyset$

Beobachtung

am Ende enthält PI alle Primimplikanten
denn jeder Primimplikant ist Implikant, also in einer Liste vorhanden
und Primimplikant hat keine Verkürzung, die auch Implikant ist,
wird deshalb zu PI hinzugefügt

also Berechnung der PI nach Quine/McCluskey korrekt $\checkmark$

Beispiel PI-Berechnung

1. $i := 0$; $\mathrm{PI} := \emptyset$
2. So lange $L_i \neq \emptyset$
3. $\quad L_{i+1} := \{m \mid \exists x\colon \{m\,x, m\,\overline{x}\} \subseteq L_i\}$
4. $\quad \mathrm{PI} := \mathrm{PI} \cup \{m \in L_i \mid m$ hat keine echte Verkürzung in $L_{i+1}\}$
5. $\quad i := i + 1$
6. Ausgabe PI

$$\mathrm{PI} = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_2\,x_4, x_1\,\overline{x_2}\,x_4, x_1\,x_2\,x_3, x_3\,x_4\}$$

$$L_0 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}, \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4, \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4, x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4, x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4, x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}, x_1\,x_2\,x_3\,x_4\}$$

$$L_1 = \{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3, \overline{x_1}\,x_3\,x_4, \overline{x_2}\,x_3\,x_4, \overline{x_1}\,x_2\,x_4, x_2\,x_3\,x_4, x_1\,\overline{x_2}\,x_4, x_1\,x_3\,x_4, x_1\,x_2\,x_3\}$$

$$L_2 = \{x_3\,x_4\}$$

$$L_3 = \emptyset$$

Der Algorithmus von Quine und McCluskey

Algorithmus von Quine/McCluskey

Eingabe Fkt. f als Liste aller Minterme zu einschlägigen Indizes
Ausgabe Minimalpolynom zu f

1. Berechne PI, Menge aller Primimplikanten von f. $\checkmark$
2. Berechne minimale f überdeckende Auswahl aus PI.

schwieriges kombinatorisches Problem

nur heuristische Lösung
mit gewissen Freiheitsgraden

Das Überdeckungsproblem

Aufgabe Finde minimale Überdeckung von f mit PI.

PI-Tafel

- eine Zeile für jeden Primimplikanten
- eine Spalte für jede Eins-Eingabe
- Eintrag $= \begin{cases} 1 & \text{Primimplikant überdeckt Eins-Eingabe} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

klar PI-Tafel meist riesig groß

klar verkleinern

dazu Verkleinerungsregeln

Freiheit durch

- Reihenfolge der Regelanwendung
- Art der Regelanwendung

Problem Lösung oft trotzdem nicht ablesbar

Lösung Backtracking oder Heuristiken

Verkleinerungsregeln

- Streichung von Kernimplikanten-Zeilen
  Spalte s mit nur einer 1: Wähle Primimplikant der korrespondierenden Zeile, streiche diese Zeile und alle von ihr überdeckten Spalten.
  Begründung Kernimplikanten müssen gewählt werden. Überdeckte Eins-Eingaben können gestrichen werden.
- Streichung überdeckender Spalten
  Spalten s, s' mit $s \geq s'$: Streiche Spalte s.
  Begründung s' ist schwieriger zu überdecken: Jeder Primimplikant, der s' überdeckt, überdeckt auch s. Also können wir s entfernen.
- Streichung überdeckter Zeilen
  Zeilen z, z' mit $z \geq z'$: Streiche Zeile z'.
  Begründung Primimplikant zu z deckt mehr ab als Primimplikant zu z'. Also ist es sicher nicht schlechter, z zu wählen.

Beispiel PI-Tafel

	0010	0011	0101	0111	1001	1011	1110	1111
$\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ x_3$	1	1						
$x_3\ x_4$		1		1		1		1
$\overline{x_1}\ x_2\ x_4$			1	1				
$x_1\ x_2\ x_3$							1	1
$x_1\ \overline{x_2}\ x_4$					1	1		

$<$

Streichung überdeckender Spalten

Beispiel PI-Tafel

	0010	0101	0111	1001	1011	1110	1111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	1						
$x_3\,x_4$			1		1		1
$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$		1	1				
$x_1\,x_2\,x_3$						1	1
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$				1	1		

$<$

Streichung überdeckender Spalten

Beispiel PI-Tafel

	0010	0101	1001	1011	1110	1111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	1					
$x_3\,x_4$				1		1
$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$		1				
$x_1\,x_2\,x_3$					1	1
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$			1	1		

$<$

Streichung überdeckender Spalten

Beispiel PI-Tafel

	0010	0101	1001	1110	1111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	1				
$x_3\,x_4$					1
$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$		1			
$x_1\,x_2\,x_3$				1	1
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$			1		

Streichung überdeckter Zeilen

Beispiel PI-Tafel

	0010	0101	1001	1110	1111
$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$	1				
$\overline{x_1}\,x_2\,x_4$		1			
$x_1\,x_2\,x_3$				1	1
$x_1\,\overline{x_2}\,x_4$			1		

Kernimplikanten-Zeilen

also $f(x_1, \ldots, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,x_4 \vee x_1\,x_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2}\,x_4$